Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 3

№1

Заметим, что так как важен и порядок носков и нога на которую они были надеты, то размещение носков можно представить в виде перестановки с повторениями.

$Б^2\ Е^2\ 4^2\ Б^2\ 4^2\ С^2$. $P^6_{(2,2,2)} = \frac{6!}{8} = 90$.

т.к. каждый носок имеет две формы упаковки на 2^6.

$90 \cdot 2^6 = 90 \cdot 64 = 5760$ сп.

Ответ: 5760.

№2

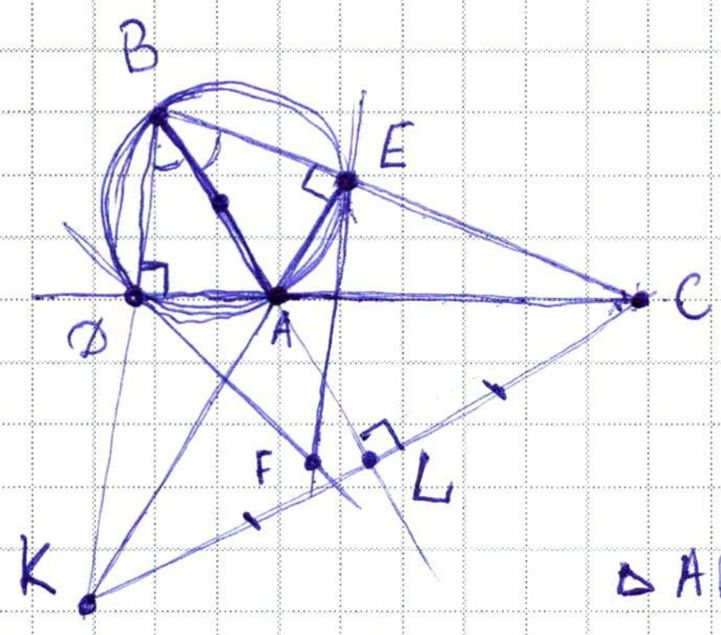
$(3+\sqrt{7})^{100} = C_{100}^0 \cdot 3^{100} + C_{100}^1 \cdot 3^{99}\sqrt{7} + C_{100}^2 \cdot 3^{98} \cdot (\sqrt{7})^2 + \dots + C_{100}^{99} \cdot 3 \cdot (\sqrt{7})^{99} + C_{100}^{100} \cdot (\sqrt{7})^{100}$

Заметим, что на нечетных после запятой влияет только слагаемое с $\sqrt{7}$.

Запишем слагаемые с $\sqrt{7}$ в виде суммы: $\sum_{n=1}^{50} C_{100}^n \cdot 3^{100-(2n-1)} \cdot (\sqrt{7})^{2n-1}$

$\sqrt{7} \approx 2,65$

Можно использовать оборот листа для записи решений



N3

$\sin\angle CBD = 0{,}6$; $\Rightarrow \cos\angle CBD = 0{,}8$. (по осн. триг тожд.)

$FD = 6$

$R(ACK) = ?$

$\angle ADB = 90^\circ$ т.к. AB - диам.

$L = (AB) \cap (CK)$

$\triangle ABD \sim \triangle KBL$ по 2 угл.

$\Rightarrow \frac{KL}{AD} = \frac{AD}{KL} = \frac{BD}{BL}$;

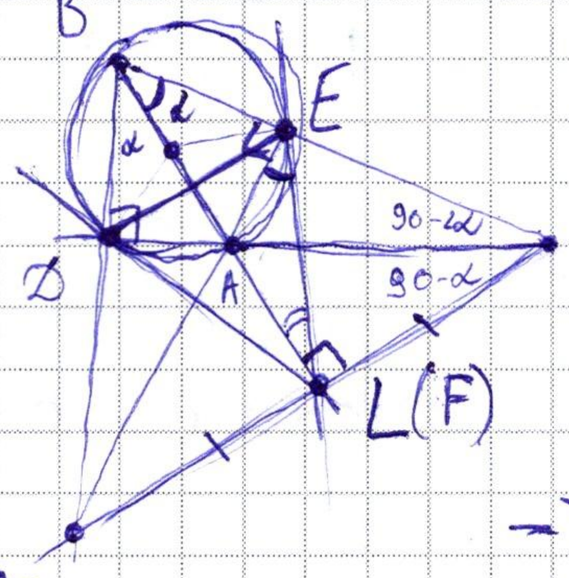
аналог-но: $\triangle AED \sim \triangle CLB$ по 2 угл: $\frac{AE}{CL} = \frac{BE}{BL}$.

т.к. $\triangle ADB = \triangle AEB$, то $AE = AD$, $BD = BE$ $\Rightarrow \frac{AD}{KL} = \frac{AE}{CL}$

$\Rightarrow KL = CL$.

$\triangle KBC$ - р/б, т.к. BL - мед. и выс. $\Rightarrow KB = CB$.

Но тогда $F \in (AB)$, т.к. E и D равноуд. от AB.



и K, A, E - лежат на одной прямой

откуда A - ортоцентр $\triangle KBC$.

$\angle DBC = 180^\circ - \angle DAE$ - т.к. вписс $\Rightarrow$

$\angle DBE = \angle KAC$ - верт

$\Rightarrow \angle KAC = 180^\circ - \angle DBE = 180 - 2\alpha$

Д-ем, что $L \equiv F$.

$\triangle FEB \sim \triangle FAE$ по 2 угл.: $\frac{FA}{FE} = \frac{EB}{AE} = \frac{FB}{FE}$ $FA \cdot FB = FE^2$

$\frac{BE}{BL} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow BA \cdot BL = BE \cdot BC$, откуда степень точки F = степени точки L и они лежат на оси.

прямой $\Rightarrow F \equiv L$.

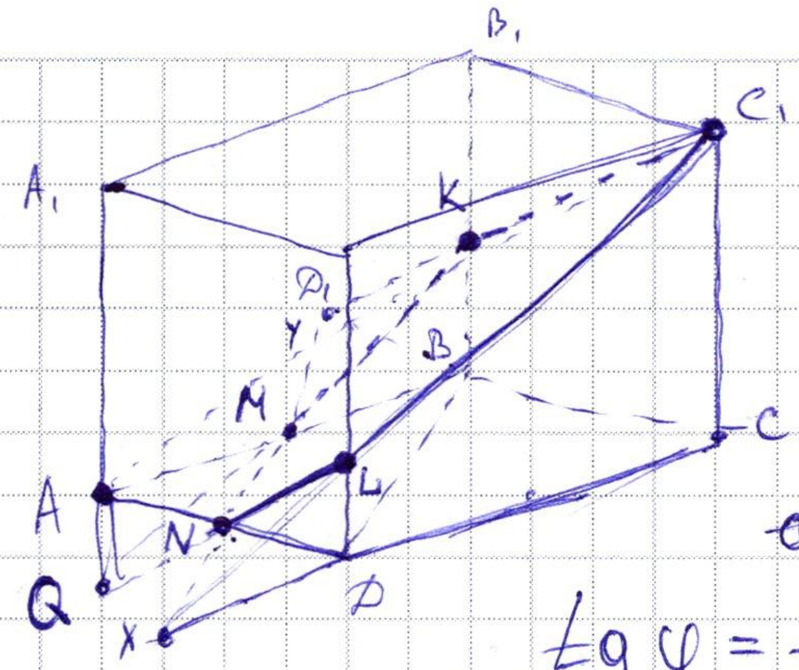
$$\begin{cases} FD^2 = FA \cdot FB \\ FD^2 + OD^2 = (FA + AO)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} FA(FA + 2r) = 36 \\ 36 + r^2 = (FA + r)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} FA^2 + 2FA \cdot r = 36 \\ FA^2 + 2FA \cdot r + r^2 = r^2 + 36 \end{cases} \qquad \alpha = \frac{\angle CBD}{2}$$

$\angle DOF = 2\alpha$ - центр $\rightarrow \angle DFO = 90 - 2\alpha$.

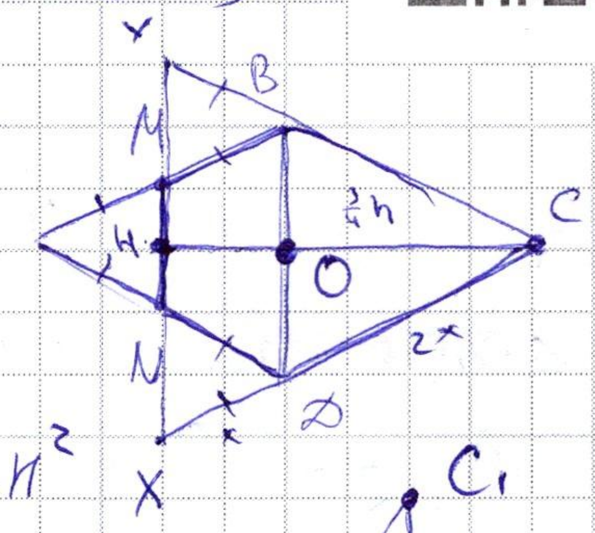
по т. синусов $\frac{DF}{\sin 2\alpha} = \frac{BD}{\sin(90 - 2\alpha)}$

olymp.bmstu.ru



№5

MN - след α на (ABC)

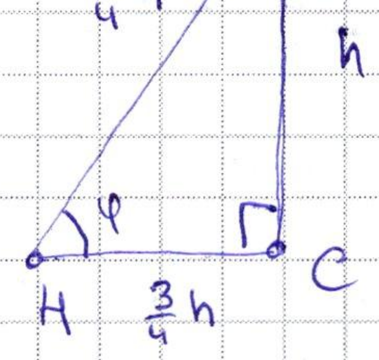


~~arctg~~

$tg\varphi = \frac{4}{3}$, $\frac{C_1C}{CH} = \frac{4}{3}$

$C_1C = h$ по т. Пифагора $\Delta CC'H: CH^2 + CC_1^2 = C_1H^2$

$\Rightarrow C_1H = \frac{5}{4}h \Rightarrow \cos\varphi = \frac{CH}{C_1H} = \frac{3}{5}$.



$\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \frac{35}{24}$; $S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\alpha} = \frac{5}{3}S_{пр}$.

$\Rightarrow \frac{\frac{5}{3}S_{пр}}{S_{осн}} = \frac{35}{24} \Rightarrow \frac{S_{пр}}{S_{осн}} = \frac{7}{8}$.

~~S~~ $S_{осн} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = 2S_{\Delta ABD}$

$S_{пр} = 2S_{\Delta ABD} - S_{\Delta AMN} = \frac{7}{8} \cdot 2S_{\Delta ABD} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABD}$

$\Rightarrow$ MN - ср. линия ΔABD ($MN \parallel BD$).

C_1KMNL - искомое сечение.

$CH = \frac{3}{4}h \Rightarrow AC = h$;

$AQ - QL = \frac{1}{3}h$; $HO = \frac{1}{2}h = AH$.

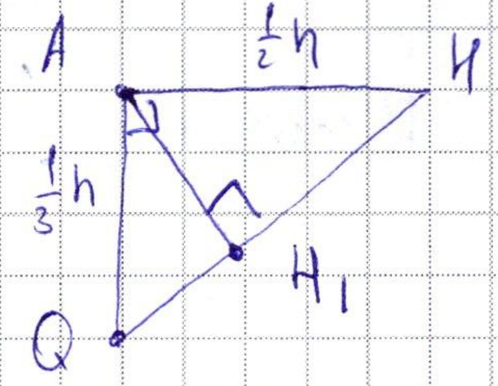
$XD = \frac{1}{3}XC$

$XB = \frac{1}{3}XC$

$\Rightarrow \frac{BK}{BB_1} = \frac{1}{3} = \frac{DL}{DD_1}$

$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = h\sqrt{2}$

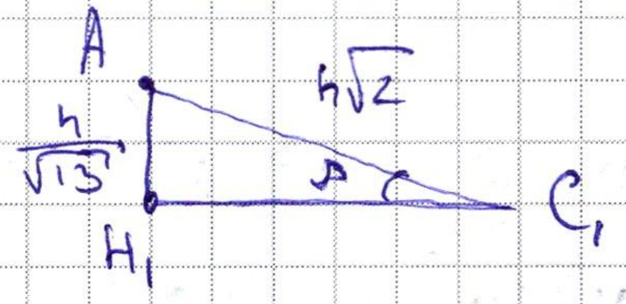
$AH_1 = \rho(A, \alpha) = \frac{AH \cdot AQ}{\sqrt{AH^2 + AQ^2}} = \frac{\frac{1}{6}h^2}{\frac{1}{6}h\sqrt{13}} = \frac{h}{\sqrt{13}}$



Реем ΔAH_1C_1, $(AH) \perp \alpha$ - по построению.

AC_1 - наклонная к $\alpha \Rightarrow \angle AC_1H_1$ - искомый

$\cos\beta = \frac{AH_1}{AC_1} = \frac{\frac{h}{\sqrt{13}}}{h\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$



Ответ: $\angle(\alpha, AC_1) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$.

olymp.bmstu.ru

$\angle DOF = 2\alpha = \angle DBC$; Т. синусов для $\triangle FDO$:

$\frac{DF}{\sin 2\alpha} = \frac{OD}{\sin\angle DFO}$, где $\angle DFO = 90 - 2\alpha$

$\frac{DF}{\sin 2\alpha} = \frac{OD}{\cos 2\alpha} = \frac{DF}{\sin\angle CBD} \Rightarrow OD = \frac{DF \cdot \cos\angle CBD}{\sin\angle CBD} = \frac{6 \cdot 0{,}8}{0{,}6} = 8.$

$\Rightarrow OD = 8 \Rightarrow r = 8.$

по т. Пифагора. $\triangle DFO$: $DF^2 + DO^2 = OF^2 \Rightarrow OF^2 = 10$

$\Rightarrow AF = OF - OA = OF - r = 2.$

$\triangle KAF$: $AF = 2$, $\angle AKF = \alpha = \frac{1}{2}\angle DBC.$

$\sin 2\alpha = 0{,}6 = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha.$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = \sqrt{0{,}9} = 0{,}3\sqrt{10}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}6\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$

$AK = \frac{AF}{\sin\alpha}$, т. к. $\angle AFK = 90^\circ \Rightarrow AK = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = 2\sqrt{10}$

$R_{(CAK)} = \frac{AK}{2\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{10}}{\frac{2}{\sqrt{10}}} = 10$

Ответ: 10.

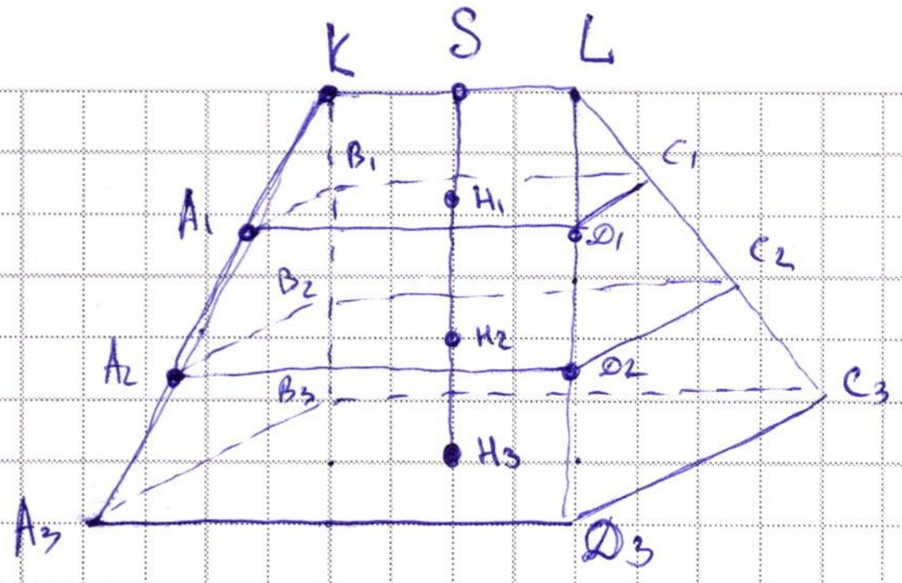
№4

$P(x,y) = x^3 + 8y^3 - 3xy^2 - 6x^2y - x - 2y =$ ~~$(x+2y)$~~

$(x+2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^2$

$\begin{cases} x+2y = a \\ xy = b \\ y+2x = c \end{cases}$: $(x+2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) - 3xy(y+2x) - (x+2y) =$

$= a(a - 6b) - 3bc - c = a^2 - 6ab - 3bc - c$



$V(KKA_3B_3C_3D_3) = 10\ м_3 = V$

$SH_1 = H_1H_2 = H_2H_3 = 1\ м.$

$$\frac{V(KKA_3B_3C_3D_3)}{V(KKA_1B_1C_1D_1)} = \left(\frac{SH_1}{SH_3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow V(LKA_1B_1C_1D_1) = \frac{10}{27}\ м^3. = V_1$$

$$\frac{V(LKA_1B_1C_1D_1)}{V(LKA_2B_2C_2D_2)} = \left(\frac{SH_1}{SH_2}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow V(LKA_2B_2C_2D_2) = \frac{80}{27}.$$

$$\Rightarrow V(A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2) = \frac{80}{27} - \frac{10}{27} = \frac{70}{27}\ м^3. = V_2 = V - V_1$$

$$\Rightarrow V(A_2B_2C_2D_2A_3B_3C_3D_3) = V - V_1 - V_2 = \frac{270}{27} - \frac{70}{27} - \frac{10}{27} = \frac{190}{27}\ м^3 = V_3$$

$W_1(V_1) = 0{,}3 \cdot V_1 = \frac{1}{9}\ м^3$; $W_2(V_2) = 0{,}6 \cdot \frac{70}{27} = \frac{14}{9}\ м^3$;

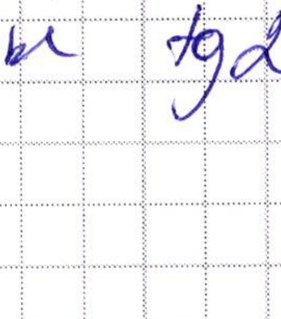
$W_3(V_3) = 0{,}9 \cdot \frac{190}{27} = \frac{57}{9}\ м^3$

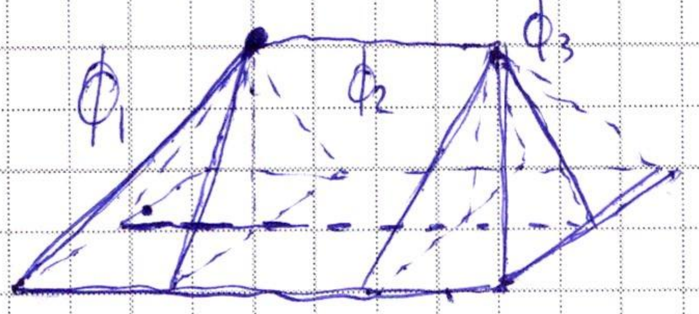
$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{1}{9} + \frac{14}{9} + \frac{57}{9} = \frac{72}{9} = 8\ м^3.$

Ответ: $V = 10\ м^3$; $W = 8\ м^3$

№6

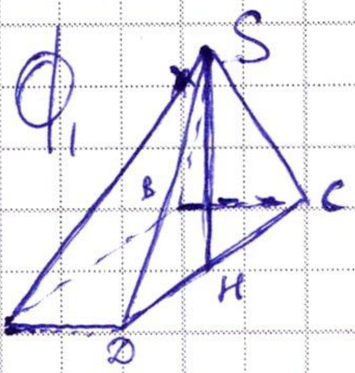
Для максимизации объема снега необходимо макс. высоту этой кучи. В ~~фиг~~ конусе tg угла ~~между~~ ~~любой~~ ~~его~~ ~~прямой~~, ~~лежащей на его~~ боковой стор всегда постоянен, если ~~тогда~~ он лежит на боковой стороне конуса. Т.е. необходимо вписать в прям-ик окр-сти и построить на них фигуру так, чтобы $tg\alpha = 3$. Тогда фигура будет иметь вид:





$V = V(\Phi_1) + V(\Phi_2) + V(\Phi_3)$, где

$V(\Phi_1) = V(\Phi_3)$ ввиду симметрии фигуры.

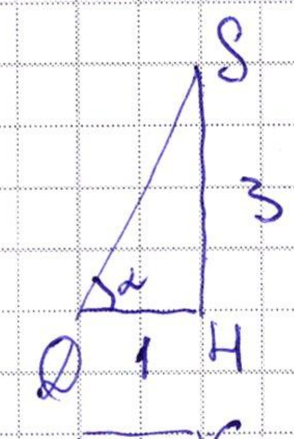


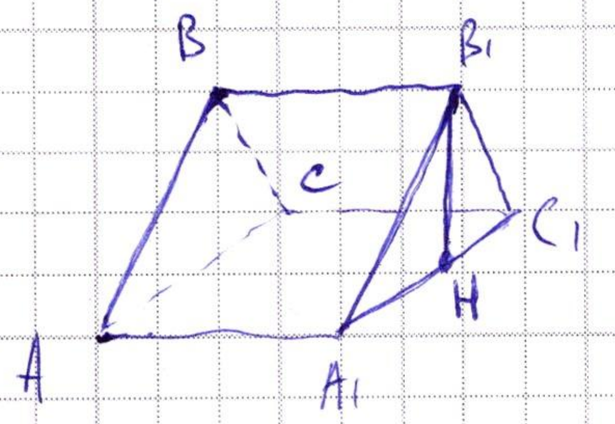
$(SH) \perp (ABCD)$;

$SH = \partial K \cdot tg\alpha = 3$; $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2$.

$V(\Phi_1) = \frac{1}{3} \cdot SK \cdot S_{ABCD} = 2$.

$V(\Phi_3) = V(\Phi_1) = 2$.





$(B_1H) \perp (AC C_1)$, аналог-но, $B_1H = SH = 3$.

$BB_1 = 2$ - как расст. между цент. окружн.

$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} B_1H \cdot A_1C_1 = 3$

$V(\Phi_2) = BB_1 \cdot S_{A_1B_1C_1} = 2 \cdot 3 = 6$.

$V = V(\Phi_1) + V(\Phi_2) + V(\Phi_3) = 6 + 2 + 2 = 10$ м³.

